CHUYÊN ĐỀ 1: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VÀ GIẢI CÂU TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (I)

- Nếu hai phương trình trên có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (I).
- Nếu hai phương trình trên không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.
- Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

1. Phương pháp thế

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ đó cho (coi là PT (1)), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình thứ hai (PT (2)) để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho PT (2) trong hệ (PT (1) cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia).

2. Phương pháp cộng đại số

- Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới chỉ còn một ẩn.
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (giữ nguyên phương trình còn lại).

Chú ý:

- Trong phương pháp cộng đại số, trước khi thực hiện bước 1, có thể nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.
- Đôi khi ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa hệ phương trình đó cho về hệ phương trình với hai ẩn mới, rồi sau đó sử dụng một trong hai phương pháp giải ở trờn.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU TẬP

Dạng 1: Giải hệ phương trình đơn giản bằng phương pháp cộng, phương pháp thế và phương pháp đặt ẩn phụ

Câu 1: Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Câu 2: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

Câu 3: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 5(x+2) = 2(y+7) \\ 3(x+y) = 17 - x \end{cases}$; b) $\begin{cases} (x+2)(y-5) = xy - 50 \\ (x+4)(y+4) = xy + 216 \end{cases}$

Câu 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x+2)(y-5)=xy-50\\(x+4)(y+4)=xy+216\end{cases}$

Câu 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{x-y}{3}\\\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{2}+1\end{cases}$

Câu 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{-1}{2}\\2x-\dfrac{3}{y}=\dfrac{-7}{2}\end{cases}$.

Câu 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2}{y+2}=4\\\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{1}{y+2}=5\end{cases}$.

Câu 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y}+\dfrac{1}{y-1}=5\\\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{y-1}=-1\end{cases}$.

Câu 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{2}{y-2}=6\\\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{y-2}=3\end{cases}$.

Câu 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases}|x|+2\sqrt{y-1}=5\\4|x|-\sqrt{y-1}=2\end{cases}$

Câu 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases}|x+2|+\dfrac{2}{\sqrt{y}-3}=9\\|x+2|-\dfrac{1}{2(\sqrt{y}-3)}=4\end{cases}$

Dạng 2: Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

1. Phương pháp:

Cách 1: Đưa hệ phương trình đã cho về phương trình bậc nhất

- **Bước 1:** Đưa hệ phương trình về phương trình bậc nhất dạng $ax+b=0$ (Dùng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số,…)
- **Bước 2**: Xét phương trình $ax+b=0$ (1) (a,b là hằng số)

TH 1: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a\neq 0\Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}$.

TH 2: Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$.

TH 3: Phương trình (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$.

□ **Bước 3**: Kết luận.

Cách 2: Xem hai phương trình của hệ là hai phương trình đường thẳng, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx-y=2m \\ 4x-my=m+6 \end{cases}$ vô nghiệm

Câu 2: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx-2y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ có nghiệm

Câu 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+ay=-4 \\ ax-3y=5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $a=1$

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-2)x-3y=-5 \\ x+my=3 \end{cases}$ (I) (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình (I) với $m=1$.

b) Chứng minh hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất với mọi m. Tìm nghiệm duy nhất đó theo m.

Dạng 3: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa điều kiện cho trước.

1. Phương pháp:

□ **Bước 1**: Giải hệ phương trình tìm nghiệm (x,y) theo tham số m;

□ **Bước 2**: Thế nghiệm x,y vào biểu thức điều kiện cho trước, giải tìm m;

□ **Bước 3**: Kết luận.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=m+3 \\ 2x-3y=m \end{cases}$ (I) (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình (I) khi $m=1$.

b) Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x+y=-3$.

Câu 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=5m-1 \\ x-2y=2 \end{cases}$.

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn: $x^2-2y^2=-2$

Câu 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x+y=2 \\ mx+y=m+1 \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$;

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn: $2x+y\le 3$.

Câu 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x+y=2m+9 \\ x+y=5 \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$. Tìm m để biểu thức $A=xy+x-1$ đạt giải trị lớn nhất.

Câu 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=m+1 \\ mx+y=2m \end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $\begin{cases} x\ge 2 \\ y\ge 1 \end{cases}$

Câu 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (a+1)x-y=a+1 & (1) \\ x+(a-1)y=2 & (2) \end{cases}$ (a là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $a=2$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình.

c) Tìm các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên

d) Tìm a để nghiệm của hệ phương trình thỏa mãn $x+y$ đạt GTNN.

Câu 7: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y=5 & (1) \\ mx-y=4 & (2) \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) trong đó x,y trái dấu.

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x=|y|$.

Câu 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+my=m+1 & (1) \\ mx+y=3m-1 & (2) \end{cases}$

a) Không giải hệ phương trình trên, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

b) Giải và biện luận hệ phương trình trên theo m.

c) Tìm số nguyên m sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) mà x,y đều là số nguyên.

d) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x,y) thì điểm $M(x,y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

e) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 9: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm. Gọi $(x_0; y_0)$ là một cặp nghiệm của phương trình: Chứng minh: $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán - ĐHSP Hà Nội 2015).

Câu 10: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 3 & (1) \\ mx + y = 2m + 1 & (2) \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất (x, y), hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau đây:

a) $P = x^2 + 3y^2$ (1).

b) $Q = x^4 + y^4$ (2).

Dạng 4: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Phương pháp chung giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Cách giải một Câu toán bằng cách lập hệ phương trình, chúng ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Lập hệ phương trình.

- Biểu diễn hai đại lượng phù hợp bằng ẩn số x và y (thường đặt ẩn số là những đại lượng đề Câu yêu cầu cần tìm, Câu yêu cầu tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn thì chúng ta sẽ đặt x là chiều dải mảnh vườn, y là chiều rộng mảnh vườn.). Sau đó, đặt đơn vị và điều kiện của ẩn một cách thích hợp (Câu độ dài, thời gian hoàn thành công việc thì không thể là số âm.).

- Biểu thị các đại lượng chưa biết còn lại qua ẩn.

- Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng và thành lập hệ hai ẩn từ các phương trình vừa tìm.

- Bước 2: Giải hệ phương trình nói trên.

- Bước 3: Kiểm tra nghiệm tìm được thỏa mãn điều kiện của Câu toán và nêu kết luận

Bài toán 1: Chuyển động (trên đường bộ, trên đường sông có tính đến dòng nước chảy)

1. Một số lưu ý

Đối với dạng toán này, cần chú ý đến điều kiện của ẩn:

- Nếu gọi x là vận tốc của chuyển động thì điều kiện là $x > 0$.

- Đặt thời gian chuyển động là y thì điều kiện là $y \geq 0$.

- Một số công thức:

- Quãng đường bằng vận tốc nhân thời gian, s=v.t;

- Vận tốc khi nước đứng yên = vận tốc riêng;

- Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước;

- Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng - vận tốc dòng nước.

- Nếu hai xe đi ngược chiều nhau cùng xuất phát khi gặp nhau lần đầu:

- Thời gian hai xe đi được là như nhau,

- Tổng quãng đường 2 xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của 2 xe.

- Cách đổi đơn vị thời gian, vận tốc:

- 1h (1 giờ) = 60 phút.

- $1(m/s) = 3,6(km/h)$, vì $1m = 1/1000km$ và $1s = 1/3600$ giờ.

- $1(km/h) = 5/18(m/s)$.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Đoạn đường AB dài 180 km. Cùng một lúc xe máy đi từ A và ô tô đi từ B xe máy gặp ô tô tại C cách A 80 km. Nếu xe máy khởi hành sau 54 phút thì chúng gặp nhau tại D cách A là 60 km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy?

Câu 2: Một xe máy đi từ A đến *B*. Sau đó 1giờ, một ô tô cũng đi từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 10 km/h. Biết rằng ô tô và xe máy đến B cùng một lúc. Tính vận tốc của mỗi xe, với giả thiết quãng đường AB dài 200km

Câu 3: Trên quãng đường AB, một xe máy đi từ A đến B cùng lúc đó một xe ôtô đi từ B đến A, sau 4 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ôtô đến A sớm hơn xe máy đến B là 6 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB

Câu 4: Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km, sau đó chạy xuôi dòng 48km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ

Câu 5: Hai ô tô đi từ A đến B dài 200km. Biết vận tốc xe thứ nhất nhanh hơn vận tốc xe thứ hai là 10km/h nên xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe

Câu 6: Hai xe ô tô cùng đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh, xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1giờ. Lúc trở về xe thứ nhất tăng vận tốc thêm 5 km mỗi giờ, xe thứ hai vẫn giữ nguyên vận tốc nhưng dừng lại nghỉ ở một điểm trên đường hết 40 phút, sau đó về đến cảng Dung Quất cùng lúc với xe thứ nhất. Tìm vận tốc ban đầu của mỗi xe, biết chiều dài quãng đường từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là 120 km và khi đi hay về hai xe đều xuất phát cùng một lúc

Bài toán 2: Toán làm chung - làm riêng (Câu toán vòi nước)

1. Một số lưu ý

Lập bảng	Thời gian làm (chảy) một mình xong công việc	Phần công việc (thể tích) trong 1 giờ	Phần công việc (thể tích) trong thời gian Câu cho
Cả hai đơn vị (hai vòi nước)	(Câu cho số liệu này)	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	

Đơn vị 1 (vòi nước 1)	x	$\frac{1}{x}$	
Đơn vị 2 (vòi nước 2)	y	$\frac{1}{y}$	

Gọi thời gian người thứ nhất làm xong công việc là x, thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là y thì:

1 giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$(công việc),

1 giờ người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ công việc

1 giờ cả hai người làm được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$(công việc)

Chú ý:

- Khi công việc không được đo bằng số lượng cụ thể, ta coi toàn bộ công việc là một đơn vị công việc, biểu thị bởi số 1.
- Năng suất làm việc là phần việc làm được trong một đơn vị thời gian.
- Gọi A là khối lượng công việc, n là năng suất, t là thời gian làm việc. Ta có: $A=n\cdot t$.
- Tổng năng suất riêng bằng năng suất chung khi cùng làm.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Hai vòi nước cùng chảy đầy một bé không có nước trong $3\text{h}45\text{ph}$. Nếu chảy riêng rẽ, mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể? biết rằng vòi chảy sau lâu hơn vòi trước 4 h.

Câu 2: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 1giờ 20 phút đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì được $\frac{2}{15}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Câu 3: Hai người thợ làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình trong mấy giờ thì xong?

Câu 4: Hai đội công nhân cùng làm chung trong 4 giờ thì xong một con đường. Nếu mỗi đội làm riêng để xong con đường thì thời gian đội thứ nhất ít hơn đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội làm xong con đường trong thời gian bao lâu?

Câu 5: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được một phần tư công việc. Hỏi mỗi người thợ làm một mình thì trong bao nhiêu giờ mới xong công việc đó.

Câu 6: Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ 20 phút và người thứ hai làm trong 10 giờ thì xong công việc. Tính thời gian mỗi công nhân khi làm riêng xong công việc.

Bài toán 3: Toán có nội dung hình học.

1. Một số lưu ý

- Khi đặt ẩn là độ dài các đoạn thẳng, độ dài các cạnh thì điều kiện của ẩn là không âm

- Diện tích hình chữ nhật $S = x.y$, với x là chiều rộng; y là chiều dài.

- Diện tích tam giác $S = \frac{1}{2}a.h_a$ với a là độ dài một cạnh tam giác và h_a là chiều cao ứng với cạnh đó.

- Định lý Pitago trong tam giác vuông với độ dài cạnh huyền là c, độ dài hai cạnh góc vuông là a, b thì

$a^2 + b^2 = c^2$

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28m. Đường chéo của hình chữ nhật dài 10m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật đó.

Câu 2: Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích 100 m^2. Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2.

Câu 3: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 360 m^2. Nếu tăng chiều dài thêm 1 m và tăng chiều rộng thêm 1 m thì diện tích của mảnh vườn sẽ là 400 m^2. Xác định chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu.
Vậy chiều dài hình chữ nhật ban đầu là 24 cm, chiều rộng là 15 cm.

Câu 4: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34 m. Nếu tăng thêm chiều dài 3m và chiều rộng 2 m thì diện tích tăng thêm 45 m^2. Hãy tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Bài toán 4: Toán về tìm số.

1. Một số lưu ý

- Số có hai, chữ số được ký hiệu là $\overline{ab}$, điều kiện $1 \le q \le 9; 0 \le b \le 9; a, b \in \mathbb{N}$.

- Giá trị của số: $\overline{ab} = 10a + b$.

- Số có ba, chữ số được ký hiệu là $\overline{abc}$ thì $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, điều kiện $1 \le q \le 9; 0 \le b, c \le 9; a, b, c \in \mathbb{N}$.

- Tổng hai số x; y là: $x + y$.

- Tổng bình phương hai số x, y là: $x^2 + y^2$.

- Bình phương của tổng hai số x, y là: $(x + y)^2$.

- Tổng nghịch đảo hai số x, y là: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho số tự nhiên có hai chữ số, tổng của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14. Nếu đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vi. Tim số đã cho.

Câu 2: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị và khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới lớn hơn số đó là 280 đơn vị.

Câu 3. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

Câu 4. Tìm một số tự nhiên có ba chữ số, tổng các chữ số bằng 17, chữ số hàng chục là 4, nếu đổi chỗ các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì số giảm đi 99 đơn vị.

Câu 5. Tìm số có ba chữ số chia hết cho 11, biết rằng khi chia số đó cho 11 được thương

bằng tổng các chữ số của số bị chia.

CHUYÊN ĐỀ 1: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VÀ GIẢI CÂU TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ (I)

- Nếu hai phương trình trên có nghiệm chung $(x_0;y_0)$ thì $(x_0;y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (I).
- Nếu hai phương trình trên không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.
- Giải hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

1. Phương pháp thế

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ đó cho (coi là PT (1)), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia, rồi thế vào phương trình thứ hai (PT (2)) để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy để thay thế cho PT (2) trong hệ (PT (1) cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia).

2. Phương pháp cộng đại số

- Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới chỉ còn một ẩn.
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (giữ nguyên phương trình còn lại).

Chú ý:

- Trong phương pháp cộng đại số, trước khi thực hiện bước 1, có thể nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.
- Đôi khi ta có thể dùng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa hệ phương trình đó cho về hệ phương trình với hai ẩn mới, rồi sau đó sử dụng một trong hai phương pháp giải ở trờn.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU TẬP

Dạng 1: Giải hệ phương trình đơn giản bằng phương pháp cộng, phương pháp thế và phương pháp đặt ẩn phụ

Câu 1: Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2x+y=4 \end{cases}$

Lời giải

Từ phương trình dưới suy ra $y=4-2x$. Thay vào phương trình trên ta có phương trình:

$3x+2(4-2x)=7 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=4-2.1=2$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;2)$.

Câu 2: Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ x+2y=1 \end{cases}$

Lời giải

Cộng hai phương trình lại với nhau, ta có: $\begin{cases}4x=12\\x+2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;-1)$

Câu 3: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}5(x+2)=2(y+7)\\3(x+y)=17-x\end{cases}$; b) $\begin{cases}(x+2)(y-5)=xy-50\\(x+4)(y+4)=xy+216\end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases}5(x+2)=2(y+7)\\3(x+y)=17-x\end{cases}$

$\begin{cases}5x-2y=4\\4x+3y=17\end{cases}$

$\begin{cases}15x-6y=12\\8x+6y=34\end{cases}$

$\begin{cases}23x=46\\5x-2y=4\end{cases}$

$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(2;3)$.

b) $\begin{cases}(x+2)(y-5)=xy-50\\(x+4)(y+4)=xy+216\end{cases}$

$\begin{cases}xy+2y-5x-10=xy-50\\xy+4x+4y+16=xy+216\end{cases}$

$\begin{cases}5x-2y=40\\x+y=50\end{cases}$

$\begin{cases}5x-2y=40\\2x+2y=100\end{cases}$

$\begin{cases}7x=140\\x+y=50\end{cases}$

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(20;30)$.

Câu 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+2)(y-5) = xy - 50 \\ (x+4)(y+4) = xy + 216 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} xy + 2y - 5x - 10 = xy - 50 \\ xy + 4x + 4y + 16 = xy + 216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 40 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 40 \\ 2x + 2y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 140 \\ x + y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(20;30)$.

Câu 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+y}{5} = \dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} + 1 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{5} = \dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 3y = 5x - 5y \\ x = 2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 8y \\ x = 2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y \\ x = 2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - 4 = 0 \\ x = 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 8 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(8;2)$.

Câu 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{-1}{2} \\ 2x - \dfrac{3}{y} = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện $y \neq 0$. Đặt $t = \dfrac{1}{y}$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x + t = \dfrac{-1}{2} \\ 2x - 3t = \dfrac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-1}{2} - x \\ 2x - 3(\dfrac{-1}{2} - x) = \dfrac{-7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-1}{2} - x \\ 5x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \text{(thỏa mãn)}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(x;y) = (-1;2)$.

Câu 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{3x}{x-1} - \dfrac{2}{y+2} = 4 \\ \dfrac{2x}{x-1} + \dfrac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$.

Lời giải

ĐK $x \neq 1; y \neq -2$

Đặt $\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} = a \\ \dfrac{1}{y+2} = b \end{cases}$ $b \neq 0$ Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 4 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 4 \\ 4a + 2b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a = 14 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Khi đó ta có: $\begin{cases} \dfrac{x}{x-1} = 2 \\ \dfrac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;-1)$.

Câu 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{4}{x+y}+\dfrac{1}{y-1}=5\\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2}{y-1}=-1\end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq -y; y\neq 1$

Đặt $u=\dfrac{1}{x+y}$ và $v=\dfrac{1}{y-1}$. Hệ phương trình thành:

$$\begin{cases}4u+v=5\\ u-2v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8u+2v=10\\ u-2v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9u=9\\ 2v=u+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\ v=1\end{cases}$$

Do đó, hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=1\\ \dfrac{1}{y-1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1\\ y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất $(x;y)=(-1;2)$.

Câu 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{2}{y-2}=6\\ \dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{y-2}=3\end{cases}$.

Lời giải

+ Điều kiện: $x\neq -1; y\neq 2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y-2}=6\\ \dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{y-2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{y-2}=5\\ \dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{y-2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{10}{y-2}=25\\ \dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{y-2}=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{11}{y-2}=22\\ \dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{y-2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y-2=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{y-2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{\frac{5}{2}-2}=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{5}{2}\\ x=0\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$.

Câu 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases}|x|+2\sqrt{y-1}=5\\4|x|-\sqrt{y-1}=2\end{cases}$

Lời giải

$\begin{cases}|x|+2\sqrt{y-1}=5\\4|x|-\sqrt{y-1}=2\end{cases}$ (I)

ĐKXĐ: $y\ge 1$

Đặt $|x|=a;\sqrt{y-1}=b;a\ge 0;b\ge 0$

Hệ phương trình (I) trở thành thiếu $\begin{cases}a+2b=5\\8a-2b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$ (tm)

Suy ra $\begin{cases}|x|=1\\\sqrt{y-1}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 1\\y-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 1\\y=3\end{cases}$ (t/m)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $(x,y)=(1;3),(-1;3)$.

Câu 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases}|x+2|+\dfrac{2}{\sqrt{y}-3}=9\\|x+2|-\dfrac{1}{2(\sqrt{y}-3)}=4\end{cases}$

Lời giải

ĐKXĐ: $y\ge 0;y\ne 9$

Đặt $|x+2|=a;\dfrac{1}{\sqrt{y}-3}=b;a\ge 0$

Ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}a+2b=9\\a-\dfrac{1}{2}b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5(tm)\\b=2\end{cases}$

Khi đó ta có $\begin{cases}|x+2|=5\\\dfrac{1}{\sqrt{y}-3}=2\end{cases}$

Trường hợp 1: $\begin{cases}x+2=5\\\sqrt{y}-3=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=\dfrac{49}{4}\end{cases}$ (t/m)

Trường hợp 1: $\begin{cases}x+2=-5\\\sqrt{y}-3=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-7\\y=\dfrac{49}{4}\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(3;\dfrac{49}{4}\right),\left(-7;\dfrac{49}{4}\right)$.

Dạng 2: Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

1. Phương pháp:

Cách 1: Đưa hệ phương trình đã cho về phương trình bậc nhất

- **Bước 1:** Đưa hệ phương trình về phương trình bậc nhất dạng $ax+b=0$ (Dùng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số,…)
- **Bước 2**: Xét phương trình $ax+b=0\ \ (1)$ (a,b là hằng số)

TH 1: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a\neq 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}$.

TH 2: Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$.

TH 3: Phương trình (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$.

- **Bước 3**: Kết luận.

Cách 2: Xem hai phương trình của hệ là hai phương trình đường thẳng, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx-y=2m \\ 4x-my=m+6 \end{cases}$ vô nghiệm

Lời giải

Từ phương trình đầu ta có $y=mx-2m\ \ (*)$.

Thế $(*)$ vào phương trình thứ hai ta được:

$4x-m(mx-2m)=m+6\Leftrightarrow (4-m^2)x=-2m^2+m+6\ \ (**)$.

Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(**)$ vô nghiệm.

$(**)$ vô nghiệm khi và chỉ khi: $\begin{cases} 4-m^2=0 \\ -2m^2+m+6\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow m=-2$.

Câu 2: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx-2y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ có nghiệm

Lời giải

$\begin{cases} mx-2y=1\ (1) \\ 2x+y=2\ (2) \end{cases}$

Từ pt $\Leftrightarrow y=2-2x$. Thế vào pt ta được:

$mx-2(2-2x)=1\Leftrightarrow (m+4)x=5\ (3)$

$\Rightarrow m\neq -4$ thì pt có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ Hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+ay=-4 \\ ax-3y=5 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $a=1$

b) Tìm a để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải

a) Với $a=1$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x+y=-4 \\ x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3y=-12 \\ x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=-7 \\ x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ -1-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Vậy với $a=1$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x;y)=(-1;-2)$.

b) Ta xét 2 trường hợp:

+ Nếu $a=0$, hệ có dạng: $\begin{cases} 2x=-4 \\ -3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất

+ Nếu $a\neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\dfrac{2}{a}\neq\dfrac{a}{-3} \Leftrightarrow a^2\neq -6$ (luôn đúng, vì $a^2\geq 0$ với mọi a)

Do đó, với $a\neq 0$, hệ luôn có nghiệm duy nhất.

Tóm lại hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất với mọi a.

Câu 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-2)x-3y=-5 \\ x+my=3 \end{cases} (I)$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình (I) với $m=1$.

b) Chứng minh hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất với mọi m. Tìm nghiệm duy nhất đó theo m.

Lời giải

a) Thay $m=1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -x-3y=5 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y=-2 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} (m-2)x-3y=-5 \\ x+my=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(3-my)-3y=-5 \\ x=3-my \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-m^2y-6+2my-3y=-5 \\ x=3-my \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2-2m+3)y=3m-1 & (1) \\ x=3-my & (2) \end{cases}$$

Ta có: $m^2-2m+3=(m-1)^2+2>0\forall m$ nên PT (1) có nghiệm duy nhất $\forall m$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\forall m$

Từ (1) ta có: $y=\dfrac{3m-1}{m^2-2m+3}$ thay vào (2) ta có $x=\dfrac{9-5m}{m^2-2m+3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=\left(\dfrac{9-5m}{m^2-2m+3};\dfrac{3m-1}{m^2-2m+3}\right)$

Dạng 3: Tìm m để hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thỏa điều kiện cho trước.

1. Phương pháp:

- **Bước 1**: Giải hệ phương trình tìm nghiệm (x,y) theo tham số m;
- **Bước 2**: Thế nghiệm x,y vào biểu thức điều kiện cho trước, giải tìm m;
- **Bước 3**: Kết luận.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases}x+2y=m+3\\2x-3y=m\end{cases}(I)$ (m là tham số).

a) Giải hệ phương trình (I) khi $m=1$.

b) Tìm m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x+y=-3$.

Lời giải

a) Với $m=1$, hệ phương trình (I) có dạng:

$$\begin{cases}x+2y=4\\2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=8\\2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,y)=(2;1)$.

b) $\begin{cases}x+2y=m+3\\2x-3y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+4y=2m+6\\2x-3y=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=m+3\\7y=m+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5m+9}{7}\\y=\dfrac{m+6}{7}\end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{5m+9}{7};\dfrac{m+6}{7}\right)$.

Lại có $x+y=-3$ hay $\dfrac{5m+9}{7}+\dfrac{m+6}{7}=-3\Leftrightarrow 5m+9+m+6=-21\Leftrightarrow 6m=-36\Leftrightarrow m=-6$

Vậy với $m=-6$ thì hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất (x,y) thỏa mãn $x+y=-3$.

Câu 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}2x+y=5m-1\\x-2y=2\end{cases}$.

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn: $x^2-2y^2=-2$

Lời giải

$$\begin{cases}2x+y=5m-1\\x-2y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5m-1-2x\\x-2(5m-1-2x)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5m-1-2x\\5x=10m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2m\\y=m-1\end{cases}$$

Thay vào ta có

$$x^2-2y^2=-2\Leftrightarrow(2m)^2-2(m-1)^2=-2\Leftrightarrow 2m^2+4m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-2\end{array}\right.$$

Vậy $m\in\{-2;0\}$.

Câu 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m-1)x+y=2\\mx+y=m+1\end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$;

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn: $2x+y\le 3$.

Lời giải

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

Ta có: $\begin{cases}x+y=2\\2x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

b) Ta có $y=2-(m-1)x$ thế vào phương trình còn lại ta được phương trình:

$mx+2-(m-1)x=m+1\Leftrightarrow x=m-1$ suy ra $y=2-(m-1)^2$ với mọi m

Vậy hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(m-1;2-(m-1)^2\right)$

$2x+y=2(m-1)+2-(m-1)^2=-m^2+4m-1=3-(m-2)^2\le 3$ với mọi m.

Câu 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases}3x+y=2m+9\\x+y=5\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$. Tìm m để biểu thức $A=xy+x-1$ đạt giải trị lớn nhất.

Lời giải

$$\begin{cases}3x+y=2m+9\\x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=m+2\\y=3-m\end{cases}\Rightarrow A=xy+x-1=8-(m-1)^2\Rightarrow A_{max}=8 \text{ khi } m=1.$$

Câu 5: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=m+1\\mx+y=2m\end{cases}$ (m là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge 1\end{cases}$

Lời giải

a) Thay $m=1$ ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+2y=3\\ 2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\ 4x+2y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=5\\ 2x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\ y=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

b) Xét hệ $\begin{cases}x+my=m+1 & (1)\\ mx+y=2m & (2)\end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow y=2m-mx$ thay vào (1) ta được $x+m(2m-mx)=m+1\Leftrightarrow 2m^2-m^2x+x=m+1$

$\Leftrightarrow(1-m^2)x=-2m^2+m+1\Leftrightarrow(m^2-1)x=2m^2-m-1$ (3)

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow(3)$ có nghiệm duy nhất $m^2-1\ne 0\Leftrightarrow m\ne\pm 1$ $(*)$

Khi đó hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=\dfrac{2m+1}{m+1}\\ y=\dfrac{m}{m+1}\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2m+1}{m+1}\ge 2\\ \dfrac{m}{m+1}\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-1}{m+1}\ge 0\\ \dfrac{-1}{m+1}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m+1<0\Leftrightarrow m<-1$

Kết hợp với $(*)$ ta được giá trị m cần tìm là $m<-1$.

Câu 6: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(a+1)x-y=a+1 & (1)\\ x+(a-1)y=2 & (2)\end{cases}$ (a là tham số)

a) Giải hệ phương trình khi $a=2$.

b) Giải và biện luận hệ phương trình.

c) Tìm các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên

d) Tìm a để nghiệm của hệ phương trình thỏa mãn $x+y$ đạt GTNN.

Lời giải

a) Khi $a=2$ hệ phương trình có dạng: $\begin{cases}3x-y=3\\ x+y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=5\\ y=2-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}\\ y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

Vậy với $a=2$ hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{3}{4}\right)$

b) Giải và biện luận:

Từ PT (1) ta có: $y=(a+1)x-(a-1)$ (3) thế vào PT (2) ta được:

$x+(a+1)\left[(a+1)x-(a-1)\right]=2\Leftrightarrow x+\left(a^2-1\right)x-\left(a^2-1\right)=2\Leftrightarrow a^2x=a^2+1$ (4)

TH1: $a\neq 0$, phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{a^2+1}{a^2}$. Thay vào (3) ta có:

$$y=(a+1)\frac{a^2+1}{a^2}-(a+1)=\frac{(a+1)\left(a^2+1\right)-a^2(a+1)}{a^2}=\frac{a^3+a+a^2+1-a^3-a^2}{a^2}=\frac{a+1}{a^2}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

TH2: Nếu $a=0$, phương trình (4) vô nghiệm. Suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

KL: $a\neq 0$ hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

$a=0$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Với $a\neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

Hệ phương trình có nghiệm nguyên: $\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\ y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a^2+1}{a^2}\in\mathbb{Z}\\ \dfrac{a+1}{a^2}\in\mathbb{Z}\end{cases}\quad(a\in\mathbb{Z})$

Điều kiện cần: $x=\dfrac{a^2+1}{a^2}=1+\dfrac{1}{a^2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a^2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a=\pm 1$

Điều kiện đủ:

$a=-1\Rightarrow y=0\in\mathbb{Z}$ (nhận)

$a=1\Rightarrow y=2\in\mathbb{Z}$ (nhận)

Vậy $a=\pm 1$ hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

d) Với $a\neq 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a^2+1}{a^2};\dfrac{a+1}{a^2}\right)$

Ta có $x+y=\dfrac{a^2+1}{a^2}+\dfrac{a+1}{a^2}=\dfrac{a^2+a+2}{a^2}=1+\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}$.

Đặt $t=\dfrac{1}{a}$ ta được:

$$x+y=2t^2+t+1=2\left(t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)=2\left[\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right]=2\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\geq\frac{7}{8}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=-\frac{1}{4}$, khi đó $a=-4$

Vậy $a=-4$ thì hệ phương trình có nghiệm thỏa mãn $x+y$ đạt GTNN bằng $\frac{7}{8}$

Câu 7: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x-2y=5 & (1)\\ mx-y=4 & (2)\end{cases}$

a) Giải hệ phương trình với $m=2$.

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) trong đó x,y trái dấu.

c) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $x=|y|$.

Giải:

a) Với $m=2$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-2y=5\\ 2x-y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y+5\\ 2(2y+5)-y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y+5\\ 3y=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$$

b) Từ phương trình (1) ta có $x=2y+5$. Thay $x=2y+5$ vào phương trình (2) ta được: $m(2y+5)-y=4\Leftrightarrow(2m-1).y=4-5m$ (3)

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (3) có nghiệm duy nhất. Điều này tương đương với: $2m-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq\frac{1}{2}$. Từ đó ta được: $y=\frac{4-5m}{2m-1}$; $x=5+2y=\frac{3}{2m-1}$. Ta có: $x.y=\frac{3(4-5m)}{(2m-1)^2}$.

Do đó $x,y<0\Leftrightarrow 4-5m<0\Leftrightarrow m>\frac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện)

c)Ta có: $x=|y|\Leftrightarrow\frac{3}{2m-1}=\left|\frac{4-5m}{2m-1}\right|$ (4)

Từ (4) suy ra $2m-1>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$. Với điều kiện $m>\frac{1}{2}$ ta có:

$$(4)\Leftrightarrow|4-5m|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-5m=3\\ 4-5m=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{1}{5}(l)\\ m=\frac{7}{5}\end{array}\right.$$

. Vậy $m=\frac{7}{5}$.

Câu 8: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=m+1 & (1)\\ mx+y=3m-1 & (2)\end{cases}$

a) Không giải hệ phương trình trên, cho biết với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

b) Giải và biện luận hệ phương trình trên theo m.

c) Tìm số nguyên m sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x,y) mà x,y đều là số nguyên.

d) Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất (x,y) thì điểm $M(x,y)$ luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

e) Tìm m để hệ trên có nghiệm duy nhất sao cho $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Từ phương trình (2) ta có $y=3m-1-mx$. Thay vào phương trình (1) ta được: $x+m(3m-1-mx)=m+1\Leftrightarrow(m^2-1)x=3m^2-2m-1$ (3)

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, tức là $m^2-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm 1$.

Ta cũng có thể lập luận theo cách khác: Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $\frac{1}{m}\neq\frac{m}{1}\Leftrightarrow m^2\neq 1\Leftrightarrow m\neq\pm 1$.

b) Từ phương trình (2) ta có $y=3m-1-mx$. Thay vào phương trình (1) ta được: $x+m(3m-1-mx)=m+1\Leftrightarrow(m^2-1).x=3m^2-2m-1$ (3)

Trường hợp 1: $m\neq\pm 1$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x=\dfrac{3m^2-2m-1}{m^2-1}=\dfrac{(m-1)(3m+1)}{(m-1).(m+1)}=\dfrac{3m+1}{m+1} \\ y=3m-1-m.\dfrac{3m+1}{m+1}=\dfrac{m-1}{m+1} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $m=1$. Khi đó phương trình (3) thành: $0.x=0$.

Vậy hệ có vô số nghiệm dạng $(x;2-x),x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp 3: $m=-1$ khi đó phương trình (3) thành: $0.x=4$

(3) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm.

c) Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m\neq\pm 1$.

Ta có: $\begin{cases} x=\dfrac{3m+1}{m+1}=3-\dfrac{2}{m+1} \\ y=\dfrac{m-1}{m+1}=1-\dfrac{2}{m+1} \end{cases}$. Vậy x,y nguyên khi và chỉ khi $\dfrac{2}{m+1}$ nguyên. Do đó $m+1$ chỉ có thể là $-2;-1;1;2$. Vậy $m=-3;-2;0$ (thỏa mãn) hoặc $m=1$ (loại)

Vậy m nhận các giá trị là $-3;-2;0$.

d) Khi hệ có nghiệm duy nhất (x,y) ta có: $x-y=3-\dfrac{2}{m+1}-\left(1-\dfrac{2}{m+1}\right)=2$

Vậy điểm $M(x;y)$ luôn chạy trên đường thẳng cố định có phương trình $y=x-2$.

e) Khi hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ theo (d) ta có: $y=x-2$. Do đó:

$xy=x.(x-2)=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1\geq -1$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x=1\Leftrightarrow 3-\dfrac{2}{m+1}=1\Leftrightarrow \dfrac{2}{m+1}=2\Leftrightarrow m+1=1\Leftrightarrow m=0$.

Vậy với $m=0$ thì $x.y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Chú ý: Ta cũng có thể tìm quan hệ $x-y=2$ theo cách khác: Khi hệ phương trình $\begin{cases}x+my=m+1 & (1)\\ mx+y=3m-1 & (2)\end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(\mathrm{m}\neq\pm 1)$ lấy phương trình (2) trừ đi phương trình (1) của hệ ta thu được: $(m-1)x-(m-1)y=2(m-1)\Rightarrow x-y=2$

Câu 9: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x-my=2-4m\\ mx+y=3m+1\end{cases}$. Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm. Gọi $(x_0;y_0)$ là một cặp nghiệm của phương trình: Chứng minh: $x_0^2+y_0^2-5(x_0+y_0)+10=0$. (Trích đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán - ĐHSP Hà Nội 2015).

Lời giải:

Từ phương trình (2) của hệ phương trình ta có $y=3m+1-mx$ thay vào phương trình (1) của hệ ta có: $(m^2+1)x=3m^2-3m+2$. Do $m^2+1\neq 0$ với mọi m nên phương trình này luôn có nghiệm duy nhất x_0. Suy ra hệ luôn có nghiệm với mọi m.

Gọi $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của hệ: Từ hệ phương trình ta có: $\begin{cases}x_0-2=m(y_0-4)\\ y_0-1=m(3-x_0)\end{cases}$.Nhân cả hai vế phương trình thứ nhất với $(3-x_0)$, phương trình thứ hai với (y_0-4) rồi trừ hai phương trình cho nhau ta được: $(3-x_0)(x_0-2)-(y_0-4)(y_0-1)=0\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-5(x_0+y_0)+10=0$.

Ngoài ra ta cũng có thể giải theo cách khác như sau:

$(d):x-my+4m-2=0,(d'):mx+y-3m-1=0$. Ta dễ dàng chứng minh được đường thẳng (d) luôn đi qua điểm cố định: $A(2;4)$ và đường thẳng (d') luôn đi qua điểm cố định: $B(3;1)$. Mặt khác ta cũng dễ chứng minh đường thẳng (d) và đường thẳng (d') vuông góc với nhau nên hai đường thẳng này luôn cắt nhau. Gọi $M(x_0;y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng thì

tam giác MAB vuông tại M. Gọi I là trung điểm của AB thì $I\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$, $AB=\sqrt{10}$ suy ra

$$IM=\frac{1}{2}AB\Leftrightarrow 4IM^2=AB^2\Leftrightarrow 4\left[\left(x_0-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y_0-\frac{5}{2}\right)^2\right]=10.\Leftrightarrow {x_0}^2+{y_0}^2-5\left(x_0+y_0\right)+10=0.$$

Câu 10: Cho hệ phương trình: $\begin{cases}x+my=3 & (1)\\ mx+y=2m+1 & (2)\end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất (x,y), hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau đây:

a) $P=x^2+3y^2$ (1).

b) $Q=x^4+y^4$ (2).

Lời giải:

Từ phương trình (2) ta suy ra: $y=2m+1-mx$. Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x+m\left(2m+1-mx\right)=3\Leftrightarrow\left(m^2-1\right).x=2m^2+m-3\ (3).$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm duy nhất, điều đó xảy ra khi và chỉ khi: $m^2-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm 1$.

Khi đó $\begin{cases}x=\dfrac{2m^2+m-3}{m^2-1}=\dfrac{(m-1)(2m+3)}{(m-1).(m+1)}=\dfrac{2m+3}{m+1}=2+\dfrac{1}{m+1}\\ y=2m+1-m.\dfrac{2m+3}{m+1}=\dfrac{1}{m+1}\end{cases}$.

a) Ta có: $P=x^2+3\left(x-2\right)^2=4x^2-12x+12=\left(2x-3\right)^2+3\geq 3$

$P=3$ khi $x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2m+3}{m+1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 4m+6=3m+3\Leftrightarrow m=-3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 3.

b) Ta có: $Q=x^4+y^4=x^4+\left(x-2\right)^4$

đặt $t=x-1$.

Khi đó

$$Q=\left(t+1\right)^4+\left(t-1\right)^4=t^4+4t^3+6t^2+4t+1+t^4-4t^3+6t^2-4t+1=2t^4+12t^2+2\geq 2$$

$$Q=2\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow x=1\Leftrightarrow\frac{2m+3}{m+1}=1\Leftrightarrow 2m+3=m+1\Leftrightarrow m=-2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng 2.

Dạng 4: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Phương pháp chung giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

Cách giải một Câu toán bằng cách lập hệ phương trình, chúng ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Lập hệ phương trình.

- Biểu diễn hai đại lượng phù hợp bằng ẩn số x và y (thường đặt ẩn số là những đại lượng đề Câu yêu cầu cần tìm, Câu yêu cầu tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn thì chúng ta sẽ đặt x là chiều dải mảnh vườn, y là chiều rộng mảnh vườn.). Sau đó, đặt đơn vị và điều kiện của ẩn một cách thích hợp (Câu độ dài, thời gian hoàn thành công việc thì không thể là số âm.).

- Biểu thị các đại lượng chưa biết còn lại qua ẩn.

- Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng và thành lập hệ hai ẩn từ các phương trình vừa tìm.

- Bước 2: Giải hệ phương trình nói trên.

- Bước 3: Kiểm tra nghiệm tìm được thỏa mãn điều kiện của Câu toán và nêu kết luận

Bài toán 1: Chuyển động (trên đường bộ, trên đường sông có tính đến dòng nước chảy)

1. Một số lưu ý

Đối với dạng toán này, cần chú ý đến điều kiện của ẩn:

- Nếu gọi x là vận tốc của chuyển động thì điều kiện là $x > 0$.

- Đặt thời gian chuyển động là y thì điều kiện là $y \geq 0$.

- Một số công thức:

- Quãng đường bằng vận tốc nhân thời gian, s=v.t;

- Vận tốc khi nước đứng yên = vận tốc riêng;

- Vận tốc xuôi dòng = vận tốc riêng + vận tốc dòng nước;

- Vận tốc ngược dòng = vận tốc riêng - vận tốc dòng nước.

- Nếu hai xe đi ngược chiều nhau cùng xuất phát khi gặp nhau lần đầu:

- Thời gian hai xe đi được là như nhau,

- Tổng quãng đường 2 xe đi được bằng đúng quãng đường cần đi của 2 xe.

- Cách đổi đơn vị thời gian, vận tốc:

- 1h (1 giờ) = 60 phút.

- $1(\mathrm{m}/\mathrm{s}) = 3,6(\mathrm{km}/\mathrm{h})$, vì $1\mathrm{m} = 1/1000\,\mathrm{km}$ và $1\mathrm{s} = 1/3600$ giờ.

- $1(\mathrm{km}/\mathrm{h}) = 5/18(\mathrm{m}/\mathrm{s})$.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Đoạn đường AB dài 180 km. Cùng một lúc xe máy đi từ A và ô tô đi từ B xe máy gặp ô tô tại C cách A 80 km. Nếu xe máy khởi hành sau 54 phút thì chúng gặp nhau tại D cách A là 60 km. Tính vận tốc của ô tô và xe máy?

Giải

Gọi vận tốc của ô tô là x (km/h), đk: $x > 0$.

Gọi vận tốc của xe máylà y(km/h), đk: $y > 0$.

Thời gian xe máy đi để gặp ô tô là $\frac{80}{y}$(giờ)

Quãng đường ô tô đi là 100 km nên thời gian ô tô đi là $\frac{100}{y}$(giờ)

ta có phương trình $\frac{100}{x}=\frac{80}{y}(1)$

Quãng đường xe máy đi là 60 km nên thời gian xe máy đi là $\frac{60}{y}$(giờ)

Quãng đường ô tô đi là 120 km nên thời gian ô tô đi là $\frac{120}{y}$(giờ)

Vì ô tô đi trước xe máy 54 phút = $\frac{9}{10}$nên ta có phương trình $\frac{120}{x}-\frac{60}{y}=\frac{9}{10}(2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{100}{x}=\frac{80}{y}\\ \frac{120}{x}-\frac{60}{y}=\frac{9}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{100}{x}-\frac{80}{y}=0\\ \frac{40}{x}-\frac{20}{y}=\frac{3}{10}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{100}{x}-\frac{80}{y}=0\\ \frac{160}{x}-\frac{80}{y}=\frac{12}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{60}{x}=\frac{12}{10}\\ \frac{100}{x}-\frac{80}{y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=50\\ y=40\end{cases}(TM)$

Vậy vận tốc của ô tô là 50 km/h. Vận tốc của xe máy là 40 km/h.

Câu 2: Một xe máy đi từ A đến B. Sau đó 1giờ, một ô tô cũng đi từ A đến B với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe máy là 10 km/h. Biết rằng ô tô và xe máy đến B cùng một lúc. Tính vận tốc của mỗi xe, với giả thiết quãng đường AB dài 200km

Giải

Gọi vận tốc của xe máy và ô tô lần lượt là x và y (km/h) $(x,y > 0)$

Vận tốc ô tô lớn hơn xe máy 10km/h $\Rightarrow y - x = 10$ (1)

Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{AB}{x}=\frac{200}{x}$(h)

Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\frac{AB}{y}=\frac{200}{y}$(h)

Vì ô tô xuất phát sau xe máy 1h mà 2 xe đến nơi cùng lúc, do đó thời gian đi của ô tô ít hơn xe máy là 1h.

$\Rightarrow \frac{200}{x}-\frac{200}{y}=1(2)$

Từ (1) suy ra $y = x + 10$

Thay vào (2) ta được:

$\frac{200}{x}-\frac{200}{x+10}=1(2)\Leftrightarrow \frac{200(x+10)-200x}{x(x+10)}=1$

$\Leftrightarrow 200x+2000-200x=x^2+10x\Leftrightarrow x^2+10x-2000=0$

$\Leftrightarrow$ x = 40 (thỏa mãn) hoặc x = –50 (loại) $\Rightarrow$ y = x + 10 = 50.

Vậy vận tốc của xe máy và ô tô lần lượt là 40km/h và 50km/h .

Câu 3: Trên quãng đường AB, một xe máy đi từ A đến B cùng lúc đó một xe ôtô đi từ B đến A, sau 4 giờ hai xe gặp nhau và tiếp tục đi thì xe ôtô đến A sớm hơn xe máy đến B là 6 giờ. Tính thời gian mỗi xe đi hết quãng đường AB

Giải

Gọi $x(\text{h})$ là thời gian xe máy đi hết quãng đường AB $(x > 4)$

$y(\text{h})$ là thời gian ôtô đi hết quãng đường AB $(y > 4)$

Trong 1 giờ xe máy đi được: $\frac{1}{x}$ (quãng đường)

Trong 1 giờ xe ô tô đi được: $\frac{1}{y}$ (quãng đường)

Trong 1giờ hai xe đi được: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}(1)$

Mà thời gian xe ô tô về đến A sớm hơn xe máy về đến B là 6 giờ nên: $x - y = 6$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\\ x-y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{4}\\ y=x-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-14x+24=0\\ y=2-6\end{cases}(DK: x\neq 6)$$

Giải hệ phương trình trên được: $x = 12$(thỏa mãn); hoặc $x = 2$(loại)

Với $x = 12$, tìm được $y = 6$. Do đó, nghiệm của hệ là $(12;6)$

Vậy thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là 12 giờ, ôtô đi hết quãng đường AB là 6 giờ

Câu 4: Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km, sau đó chạy xuôi dòng 48km trên cùng một dòng sông có vận tốc của dòng nước là 2km/h. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ

Giải

Gọi t_1 là thời gian tàu tuần tra chạy ngược dòng nước.

Gọi t_2 là thời gian tàu tuần tra chạy xuôi dòng nước.

Gọi V là vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên.

Ta có:

$$V-2=\frac{60}{t_1};V+2=\frac{48}{t_2}$$

$$\Rightarrow \frac{60}{t_1}+2=\frac{48}{t_2}-2 \Leftrightarrow \frac{60}{t_1}-\frac{48}{t_2}=-4(1)$$

$$t_1-t_2=1(2)$$

$$(1);(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{t_1}-\frac{48}{t_2}=-4 \\ t_1-t_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{t_1}-\frac{48}{t_2}=-4 \\ t_1=1+t_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{60}{1+t_2}-\frac{48}{t_2}=-4 \Leftrightarrow 4t_2^{\,2}+16t_2-48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_2=-6(L) \\ t_2=2(TM) \Rightarrow \mathrm{V}=22(\mathrm{km/h}) \end{array}\right.$$

Câu 5: Hai ô tô đi từ A đến B dài 200km. Biết vận tốc xe thứ nhất nhanh hơn vận tốc xe thứ hai là 10km/h nên xe thứ nhất đến B sớm hơn xe thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc mỗi xe

Giải

Gọi vận tốc hai xe lần lượt là $x\ (\mathrm{km/h})$ và $y\ (\mathrm{km/h})\ (x, y > 0)$

Xe thứ nhất nhanh hơn xe thứ hai là 10km/h nên $x - y = 10 \Rightarrow x = y + 10$

Thời gian xe thứ nhất và xe thứ hai đi hết quãng đường AB lần lượt là $\frac{200}{x}(\mathrm{h});\frac{200}{y}(\mathrm{h})$

Vì xe thứ nhất đến sớm hơn xe thứ hai 1h nên $\frac{200}{y}-\frac{200}{x}=1(*)$

Thay $x = y + 10$ vào (*) ta được:

$$\frac{200}{y}-\frac{200}{y+10}=1\Leftrightarrow\frac{200(y+10)}{y(y+10)}-\frac{200y}{y(x+10)}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{200(y+10)-200y}{y(y+10)}=1\Leftrightarrow\frac{2000}{y(y+10)}=1$$

$$\Leftrightarrow y^2+10y-2000=0\Leftrightarrow(y+50)(y-40)=0$$

$\Leftrightarrow y=-50$ (loại) hoặc $y=40$ (thỏa mãn) $\Rightarrow x=50$

Vậy vận tốc mỗi xe lần lượt là 50km/h và 40km/h

Câu 6: Hai xe ô tô cùng đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh, xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1giờ. Lúc trở về xe thứ nhất tăng vận tốc thêm 5 km mỗi giờ, xe thứ hai vẫn giữ nguyên vận tốc nhưng dừng lại nghỉ ở một điểm trên đường hết 40 phút, sau đó về đến cảng Dung Quất cùng lúc với xe thứ nhất. Tìm vận tốc ban đầu của mỗi xe, biết chiều dài quãng đường từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là 120 km và khi đi hay về hai xe đều xuất phát cùng một lúc

Giải

Gọi vận tốc ban đầu của xe thứ nhất là $x\,(\text{km/h})$, xe thứ hai là $y\,(\text{km/h})$. ĐK: $x>0;y>0$.

Thời gian xe thứ nhất đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là $\frac{120}{x}(\text{h})$.

Thời gian xe thứ hai đi từ cảng Dung Quất đến khu du lịch Sa Huỳnh là $\frac{120}{y}(\text{h})$.

Vì xe thứ hai đến sớm hơn xe thứ nhất là 1 giờ nên ta có phương trình: $\frac{120}{x}-\frac{120}{y}=1\,(1)$

Vận tốc lúc về của xe thứ nhất là $x+5\,(km/h)$.

Thời gian xe thứ nhất về từ khu du lịch Sa Huỳnh đến cảng Dung Quất $\frac{120}{x+5}(\text{h})$.

Thời gian xe thứ hai về từ khu du lịch Sa Huỳnh đến cảng Dung Quất $\frac{120}{y}(\text{h})$.

Vì xe thứ hai dừng lại nghỉ hết $40\text{ph}=\frac{2}{3}\text{h}$, sau đó về đến cảng Dung Quất cùng lúc với xe thứ nhất nên ta có phương trình: $\frac{120}{x+5}-\frac{120}{y}=\frac{2}{3}\,(2)$.

Từ (1) và (2) ta có hpt: $\begin{cases}\frac{120}{x}-\frac{120}{y}=1\\ \frac{120}{x+5}-\frac{120}{y}=\frac{2}{3}\end{cases}$

Giải hpt:

$$\begin{cases}\dfrac{120}{x}-\dfrac{120}{y}=1\\ \dfrac{120}{x+5}-\dfrac{120}{y}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow \dfrac{120}{x}-\dfrac{120}{x+5}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 360(x+5)-360x=x(x+5)$$

$\Rightarrow x^2+5x-1800=0$

$x_1=\dfrac{-5+85}{2}=40$ (thỏa mãn ĐK)

$x_2=\dfrac{-5-85}{2}=-45$ (không thỏa mãn ĐK)

Thay $x=40$ vào pt (1) ta được: $\dfrac{120}{40}-\dfrac{120}{y}=1\Rightarrow\dfrac{120}{y}=2\Rightarrow y=60$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy vận tốc ban đầu của xe thứ nhất là 40 km/h , xe thứ hai là 60 km/h

Bài toán 2: Toán làm chung - làm riêng (Câu toán vòi nước)

1. Một số lưu ý

Lập bảng	Thời gian làm (chảy) một mình xong công việc	Phần công việc (thể tích) trong 1 giờ	Phần công việc (thể tích) trong thời gian Câu cho
Cả hai đơn vị (hai vòi nước)	(Câu cho số liệu này)	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$	
Đơn vị 1 (vòi nước 1)	x	$\dfrac{1}{x}$	
Đơn vị 2 (vòi nước 2)	y	$\dfrac{1}{y}$	

Gọi thời gian người thứ nhất làm xong công việc là x, thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là y thì:

1 giờ người thứ nhất làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc),

1 giờ người thứ hai làm được $\dfrac{1}{y}$ công việc

1 giờ cả hai người làm được $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ (công việc)

Chú ý:

- Khi công việc không được đo bằng số lượng cụ thể, ta coi toàn bộ công việc là một đơn vị công việc, biểu thị bởi số 1.
- Năng suất làm việc là phần việc làm được trong một đơn vị thời gian.
- Gọi A là khối lượng công việc, n là năng suất, t là thời gian làm việc. Ta có: $A=n\cdot t$.

- Tổng năng suất riêng bằng năng suất chung khi cùng làm.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Hai vòi nước cùng chảy đầy một bé không có nước trong $3\text{h}45\text{ph}$. Nếu chảy riêng rẽ, mỗi vòi phải chảy trong bao lâu mới đầy bể? biết rằng vòi chảy sau lâu hơn vòi trước 4 h.

Lời giải

- Gọi thời gian vòi đầu chảy chảy một mình đầy bể là x (điều kiện $x>0$, x tính bằng giờ)

- Gọi thời gian vòi sau chảy chảy một mình đầy bể là y (điều kiện $y>4$, y tính bằng giờ)

- Suy ra, trong 1 giờ vòi đầu chảy được $\frac{1}{x}$ bể, vòi sau chảy được $\frac{1}{y}$ bể.

- Sau 1 giờ, cả hai vòi chảy được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ bể.

Hai vòi cùng chảy thì đầy bể trong $3\text{h}45\text{ph}=15/4\text{h}$, nên trong 1 giờ thì cả hai vòi chảy được

$1:\frac{15}{4}=\frac{4}{15}$bể

Suy ra, ta có phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{15}$

Mặt khác, nếu chảy một mình thì vòi sau chảy lâu hơn vòi trước 4 giờ tức là $y-x=4$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{15}\\ y-x=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=10\end{cases}$

- Vậy, vòi đầu chảy một mình đầy bể trong 6 h; vòi sau chảy một mình đầy bể trong 10

Câu 2: Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể thì sau 1giờ 20 phút đầy bể. Nếu mở vòi thứ nhất chảy trong 10 phút và vòi thứ hai chảy trong 12 phút thì được $\frac{2}{15}$bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu đầy bể?

Hướng dẫn giải

Đổi $1h20'=80'$

Gọi x (phút) là thời gian vòi I chảy một mình đầy bể $(x>80)$

Gọi y (phút) là thời gian vòi II chảy một mình đầy bể $(y>80)$

Trong 1phút vòi I chảy được: $\frac{1}{x}$(bể)

Trong 1phút vòi II chảy được: $\frac{1}{y}$(bể)

Trong 1 phút cả hai vòi chảy được: $\frac{1}{80}$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{80}(1)$

Trong 10 phút vòi I chảy được: $\frac{10}{x}$ (bể)

Trong 12 phút vòi II chảy được: $\frac{12}{y}$ (bể)

Ta có phương trình: $\frac{10}{x}+\frac{12}{y}=\frac{2}{15}(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{80}\\ \frac{10}{x}+\frac{12}{y}=\frac{2}{15}\end{cases}$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases}u=\frac{1}{x}\\ v=\frac{1}{y}\end{cases}$, ta được $\begin{cases}u+v=\frac{1}{80}\\ 10u+12v=\frac{2}{15}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{120}\\ v=\frac{1}{240}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=120\\ y=240\end{cases}$

Vậy vòi I chảy một mình thì sau 120 phút đầy bể.

Vòi II chảy một mình thì sau 240 phút đầy bể.

Câu 3: Hai người thợ làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình trong mấy giờ thì xong?

Hướng dẫn giải

Gọi số giờ để mỗi người làm một mình hết công việc đó lần lượt là $x(h)$ và $y(h),(x,y>0)$.

Mỗi giờ, người thứ nhất và người thứ hai làm được: $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (công việc).

Hai người làm hết công việc đó trong 16 giờ nên: $16\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}$ (1)

Người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì được $\frac{1}{4}$ công việc

nên $3.\frac{1}{x}+6.\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) có hệ: $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}\\ 3.\frac{1}{x}+6.\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{24}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{48}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=24\\ y=48\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy thời gian để mỗi người làm một mình xong công việc là 24 giờ và 48 giờ.

Câu 4: Hai đội công nhân cùng làm chung trong 4 giờ thì xong một con đường. Nếu mỗi đội làm riêng để xong con đường thì thời gian đội thứ nhất ít hơn đội thứ hai là 6 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội làm xong con đường trong thời gian bao lâu?

Hướng Dẫn Giải

Gọi đội thứ nhất làm một mình xong công việc trong x (giờ)

Đội thứ hai làm một mình xong công việc y (giờ) $(x,y>4)$

Ta có phương trình: $y-x=6(1)$

1 giờ đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)

1 giờ đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$(công việc)

1 giờ cả hai đội làm được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$(công việc)

Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}y-x=6\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y-x=6\\ 4x+4y=xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+6\\ 4x+4x+24=x^2+6x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+6\\ x^2-2x-24=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\ y=12\end{cases}$(nhận) hoặc $\begin{cases}x=-4\\ y=2\end{cases}$ (loại).

Vậy đội thứ nhất làm trong 6 giờ, đội thứ hai làm trong 12 giờ.

Câu 5: Hai người thợ cùng làm một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì họ làm được một phần tư công việc. Hỏi mỗi người thợ làm một mình thì trong bao nhiêu giờ mới xong công việc đó.

Hướng Dẫn Giải

Gọi thời gian người thợ thứ nhất làm một mình xong việc là x (giờ) $(x>16)$

Thời gian người thợ thứ hai làm một mình xong việc là: y (giờ) $(y>16)$

Trong 1 giờ người thợ thứ nhất làm được: $\frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 3 giờ người thợ thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (công việc)

Trong 1 giờ người thợ thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Trong 6 giờ người thợ thứ hai làm được $\frac{6}{y}$ (công việc).

Hai người cùng làm trong 16 giờ thì xong việc, Ta có phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}(1)$

Người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì được một phần tư công việc, ta có phương trình: $\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}(2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{6}{y}=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{16}\end{cases}$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases}u=\frac{1}{x}\\ v=\frac{1}{y}\end{cases}$, ta được: $\begin{cases}3u+6v=\frac{1}{4}\\ u+v=\frac{1}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{24}\\ v=\frac{1}{48}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=24\\ y=48\end{cases}$ (nhận)

Vậy thời gian người thợ thứ nhất làm một mình xong việc là 24 (giờ).

Thời gian người thợ thứ hai làm một mình xong việc là 48 (giờ).

Câu 6: Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 6 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ 20 phút và người thứ hai làm trong 10 giờ thì xong công việc. Tính thời gian mỗi công nhân khi làm riêng xong công việc.

Hướng Dẫn Giải

Gọi x (h) là thời gian người thứ nhất làm 1 mình xong công việc ($x>6$).

Trong 1 h người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (cv)

Gọi y (h) là thời gian người thứ hai làm 1 mình xong công việc ($y>6$).

Trong 1h người thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (cv)

Trong 3 giờ 20 phút người thứ nhất làm được $\frac{10}{3}.\frac{1}{x}$(cv)

Trong 10h người thứ hai làm được $10.\frac{1}{y}$(cv)

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}\\ \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{x}+10\cdot\frac{1}{y}=1\end{cases}$

Đặt ẩn phụ $\begin{cases}u=\frac{1}{x}\\ v=\frac{1}{y}\end{cases}$, ta được: $\begin{cases}u+v=\frac{1}{6}\\ \frac{10}{3}u+10v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{10}\\ v=\frac{1}{15}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=10\\ y=15\end{cases}$ (nhận)

Vậy người thứ nhất làm một mình trong 10 giờ thì xong công việc.

Người thứ hai làm một mình trong 15 giờ thì xong công việc.

Bài toán 3: Toán có nội dung hình học.

1. Một số lưu ý

- Khi đặt ẩn là độ dài các đoạn thẳng, độ dài các cạnh thì điều kiện của ẩn là không âm

- Diện tích hình chữ nhật $S=x.y$, với x là chiều rộng; y là chiều dài.

- Diện tích tam giác $S=\frac{1}{2}a.h_a$ với a là độ dài một cạnh tam giác và h_a là chiều cao ứng với cạnh đó.

- Định lý Pitago trong tam giác vuông với độ dài cạnh huyền là c, độ dài hai cạnh góc vuông là a, b thì

$a^2+b^2=c^2$

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng 28m. Đường chéo của hình chữ nhật dài 10m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật đó.

Giải:

Gọi chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là a (m) (0 < a < 28)

Chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là b (m) (0 < a < b)

Chu vi của mảnh đất hình chữ nhật là 28 m nên:

(a + b).2 = 28$\Leftrightarrow$ a + b = 14 (1)

Đường chéo của hình chữ nhật 10 m nên: $a^2+b^2=10^2\Leftrightarrow a^2+b^2=100$(2)

Từ (1) và (2) ta có hệ PT $\begin{cases} a+b=14 \\ a^2+b^2=100 \end{cases}$

Từ (1) => b = 14 – a thay vào (2) được:

$a^2+(14-a)^2=100 \Leftrightarrow a^2+196-28a+a^2=100$

$\Leftrightarrow 2a^2-28a+96=0 \Leftrightarrow a^2+14a+48=0$

$\Delta' = 49-48=1$

$\Rightarrow \begin{cases} a=7-1=6 => b=8(loai) \\ a=7+1=8 => b=6(tm) \end{cases}$

Vậy chiều dài của HCN là 8 mChiều rộng của HCN là 6 m.

Câu 2: Một thửa ruộng hình chữ nhật có diện tích 100 m^2. Tính độ dài các cạnh của thửa ruộng. Biết rằng nếu tăng chiều rộng của thửa ruộng lên 2 m và giảm chiều dài của thửa ruộng đi 5 m thì diện tích của thửa ruộng tăng thêm 5 m^2.

Giải:

Gọi chiều dài ban đầu của thửa ruộng là a (m) (a > 0)

Chiều rộng ban đầu của thửa ruộng là b (m) (0<b<a)

Diện tích ban đầu của thửa ruộng là 100m^2 nên ta có: a.b=100 (1)

Chiều rộng của thửa ruộng sau khi tăng m là: b + 2 (m)

Chiều dài của thửa ruộng sau khi giảm 5m là: a – 5 (m)

Diện tích sau của thửa ruộng là:(b + 2) (a – 5)

Diện tích sau của thửa ruộng tăng thêm m2 là 100 + 5 = 105 (m^2)

⇔(b+2)(a-5)=105 (2)

Từ (1) và (2) ta có hpt: $\begin{cases} ab=100(1) \\ (b+2)(a-5)=105(2) \end{cases}$

Từ (2) ta có: ab-5b+2a-10=105

⇔100-5b+2a-10=105

⇔-5b+2a=15(*)

Từ (1) ta có: $a=\frac{100}{b}$ thay vào (*) ta được:

Câu 3: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 360 m^2. Nếu tăng chiều dài thêm 1 m và tăng chiều rộng thêm 1 m thì diện tích của mảnh vườn sẽ là 400 m^2. Xác định chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn ban đầu.

Giải:

Gọi chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật là x (m);

chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật là y (m). (điều kiện: x > y > 0)

Diện tích mảnh vườn hình chữ nhật ban đầu là 360 m^2.

Khi tăng chiều dài thêm 1 m, tăng chiều rộng thêm 1 m thì diện tích của mảnh vườn mới là 400 m^2. Tức là: Chiều dài: x +1 (m); chiều rộng: y + 1 (m)

Khi đó diện tích của hình chữ nhật mới là: (x + 1)(y + 1) = 400

$\Leftrightarrow$ xy + x + y +1 = 400 $\Leftrightarrow$ x + y = 39 (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} x+y=39 \\ xy=360 \end{cases}$$

Theo Vi-et x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - 39X + 360 = 0$.

Giải phương trình ta được hai nghiệm: $X_1 = 15$; $X_2 = 24$

Vậy chiều dài hình chữ nhật ban đầu là 24 cm, chiều rộng là 15 cm.

Câu 4: Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi 34 m. Nếu tăng thêm chiều dài 3m và chiều rộng 2 m thì diện tích tăng thêm 45 m^2. Hãy tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Giải:

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (m); chiều rộng là y (m) (0 < x, y < 17)

Theo Câu ra ta có hpt : $\begin{cases} x+y=34:2=17 \\ (x+3)(y+2)=xy+45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=5 \end{cases}$ (thỏa mãn đk)

Vậy : chiều dài = 12m, chiều rộng = 5m.

Bài toán 4: Toán về tìm số.

1. Một số lưu ý

- Số có hai, chữ số được ký hiệu là $\overline{ab}$, điều kiện $1 \le q \le 9; 0 \le b \le 9; a,b \in \mathbb{N}$.

- Giá trị của số: $\overline{ab} = 10a + b$.

- Số có ba, chữ số được ký hiệu là $\overline{abc}$ thì $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, điều kiện $1 \le q \le 9; 0 \le b,c \le 9; a,b,c \in \mathbb{N}$.

- Tổng hai số x; y là: $x + y$.

- Tổng bình phương hai số x, y là: $x^2 + y^2$.

- Bình phương của tổng hai số x, y là: $(x+y)^2$.

- Tổng nghịch đảo hai số x, y là: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

2. Bài tập áp dụng

Câu 1: Cho số tự nhiên có hai chữ số, tổng của chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14. Nếu đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vi. Tim số đã cho.

Hướng dẫn.

- Gọi chữ số số cần tìm là $\overline{xy}$, điều kiện $x, y \in \mathbb{N}, 0 < x \le 9, 0 \le y \le 9$.

- Tổng chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 14 nên có phương trình:

$x + y = 14$

Đổi chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị cho nhau thì được số mới lớn hơn số đã cho 18 đơn vị nên có phương trình: $\overline{yx} - \overline{xy} = 18$ hay chính là $10y + x - (10x + y) = 18$

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 14 \\ 10y + x - (10x + y) = 18 \end{cases}$

Giải hệ này, tìm được $x = 6, y = 8$ (thỏa mãn điều kiện) nên số cần tìm là 68.

Câu 2: Tìm một số tự nhiên có hai chữ số. Biết rằng chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị và khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới lớn hơn số đó là 280 đơn vị.

Hướng dẫn

- Gọi chữ số hàng chục là a, chữ số hàng đơn vị là b, điều kiện $a, b \in \mathbb{N}; 1 \le a \le 9; 0 \le b \le 9.$

- Số cần tìm là $\overline{ab}$ có giá trị $\overline{ab} = 10a + b$.

- Ta có chữ số hàng đơn vị hơn chữ số hàng chục là 5 đơn vị nên ta có phương trình:

$b - a = 5$

- Lại có, khi viết chữ số 1 xen vào giữa hai chữ số của số đó thì ta được số mới là $\overline{a1b}$ có giá trị $\overline{a1b} = 100a + 10 + b$.

- Do số mới lớn hơn số ban đầu là 280 đơn vị nên ta có phương trình:

$100\,a + 10 + b - (10\,a + b) = 280$

- Ta có hệ phương trình $\begin{cases} -a + b = 5 \\ (100a + 10 + b) - (10a + b) = 280 \end{cases}$

- Giải hệ này, tìm được $a = 3, b = 8$ đều thỏa mãn điều kiện nên số cần tìm là 38.

Câu 3. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số của nó bằng 11, nếu đổi chỗ hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị cho nhau thì số đó tăng thêm 27 đơn vị.

Hướng dẫn giải

Gọi số có hai chữ số là: $\overline{ab}$

Ta có hệ: $\begin{cases} a+b=11 \\ 10b+a-(10a+b)=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=7 \end{cases}$

Số cần tìm là 47.

Câu 4. Tìm một số tự nhiên có ba chữ số, tổng các chữ số bằng 17, chữ số hàng chục là 4, nếu đổi chỗ các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị cho nhau thì số giảm đi 99 đơn vị.

Giải

Số cần tìm có dạng $\overline{x4y}$ ta có hệ

$$\begin{cases} x+y=13 \\ 100x+40+y-(100y+40+x)=99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases}$$

Câu 5. Tìm số có ba chữ số chia hết cho 11, biết rằng khi chia số đó cho 11 được thương bằng tổng các chữ số của số bị chia.

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm là $\overline{xyz}$, ta có:

$100x+10y+z=11(x+y+z) \Leftrightarrow 89x=10z+y=\overline{zy}$

$\Rightarrow x=1, y=9, z=8$ ta có số 198.